数理解析研究所講究録
20巻 1967年 72-84

Hausdorff 次元とエントロピー

阪大理　渡辺毅

区間 [0, 1] の部分集合の Hausdorff 次元が、その上のある shift のエントロピーを含む形であらわされることが少なくない。この事情を [1], pp. 136—145 にしたがって説明する。関連文献として [2]—[5] をあげておく。

[1] P. Billingsley, Ergodic theory and information, Wiley, 1965.

[2] ————, Hausdorff dimension in probability theory I, Illinois J. Math., 4 (1960), 187—209, ibid., 5 (1961), 291—298.

[3] ————, On the coding theorem for the noiseless channel, Ann. Math. Stat., 32 (1961), 594—601.

[4] J. R. Kinney and T. S. Pitcher, Dimensional properties of a random function on the square, Ann. Math. Stat., 37 (1966), 849—854

[5] A. Rényi, Dimension, entropy and information,

Transactions of the Second Conference on Information Theory, etc. (Prague), 545—556.

1. 距離空間の Hausdorff 測度

E を距離空間，M をその部分集合とする．$\alpha>0$ と $\rho>0$ を取り，$l_\alpha(M,\rho)$ を次のように定義する；

$$l_\alpha(M,\rho)=\inf\left\{\sum_i(\mathrm{diam}\,S_i)^\alpha \;\middle|\; S_i \text{ 閉球}, \bigcup S_i\supset M, \mathrm{diam}\,S_i<\rho\right\},$$

たゞし $\mathrm{diam}\,S_i$ は閉球 S_i の直径をあらわす．$l_\alpha(M,\rho)$ は E 上の外測度で，ρ については単調減少である．したがって

$$l_\alpha(M)=\lim_{\rho\to 0}l_\alpha(M,\rho)$$

も外測度を定める．これをα次の Hausdorff 測度という．Borel 集合 M は l_α－可測であることが示される．以下 l_α の性質を列挙する．

1) $\alpha<\alpha'$ ならば，$l_\alpha(M)\geqq l_{\alpha'}(M)$.

2) $\sup\{\alpha \mid l_\alpha(M)=\infty\}=\inf\{\alpha \mid l_\alpha(M)=0\}$.

この共通の値を $\dim M$ と書いて，M の Hausdorff 次元という．

不等号 $\leqq$ は 1) により明らかである．逆向きの"$\geqq$"を証明する．2) の左辺を α_0 とおく．任意に $\varepsilon>0$ を取ると，$l_{\alpha_0+\varepsilon}(M)<\infty$. $\rho>0$ にたいして，$\mathrm{diam}\,S_i<\rho$ をみたす M の被覆で

$$\sum (\mathrm{diam}\, S_i)^{\alpha_0+\varepsilon} \leqq l_{\alpha_0+\varepsilon}(M, \rho)+1 \leqq l_{\alpha_0+\varepsilon}(M)+1 = K < \infty$$

となるものをえらぶ。

$$l_{\alpha_0+2\varepsilon}(M, \rho) \leqq \sum (\mathrm{diam}\, S_i)^{\alpha_0+2\varepsilon} \leqq \rho^{\varepsilon}\cdot K.$$

$\rho \to 0$ として $l_{\alpha_0+2\varepsilon}(M)=0$. したがって

$$\alpha_0+2\varepsilon \geqq \inf\{\alpha \mid l_\alpha(M)=0\}.$$

$\varepsilon \to 0$ として 2) が証明される。

これからただちに 3) — 6) がえられる。

3) $l_\alpha(M) > 0$ ならば, $\dim M \geqq \alpha$,

4) $\dim M > \alpha$ ならば, $l_\alpha(M)=\infty$,

5) $l_\alpha(M) < \infty$ ならば, $\dim M \leqq \alpha$,

6) $0 < l_\alpha(M) < \infty$ ならば, $\dim M = \alpha$.

7) $M \subset M'$ ならば, $\dim M \leqq \dim M'$

も明らかであるが, これより詳しく

8) $\dim(\bigcup M_n) = \sup \dim M_n$.

$\geqq$ は 7) より明らかである。"$\leqq$"を示すために右辺を α_0 とおき, 任意に $\varepsilon > 0$ を取る。$l_{\alpha_0+\varepsilon}(M_n)=0$. 外測度だから, $l_{\alpha_0+\varepsilon}(\bigcup M_n)=0$. したがって $\dim(\bigcup M_n) \leqq \alpha_0+\varepsilon$. $\varepsilon \to 0$ として 8) が証明される。

9) Mが1点集合あるいは高々可算集合なら, $\dim M = 0$.

定義により明らかである。

$E=[0,1]$ のときは，l_1 はその上の Lebesgue 測度にほかならない。次の性質は明らかである。

10） $l_1(M) \leqq l_1(E)=1$ だから，$\dim M \leqq \dim E = 1$。

11） $l_1(M)>0$ ならば，$\dim M = 1$。

通常の Cantor 集合の Hausdorff 次元が $\log 2/\log 3$ であることはよく知られている。その確率論的証明と，他の例を §4 で与える。

2. 定理

以下区間 $[0,1]$ を Ω であらわす。$\mathfrak{F}$ をその上の Borel 集合全体の作る σ－代数とする。r を自然数とし，$[j/r^n, (j+1)/r^n)$ の形の区間を n 次の r 進簡集合と呼ぶ。Ω の点 ω の r 進展開 $\omega = .\omega_1\omega_2\cdots$ を考え，ω_k を $x_k(\omega)$ ともかく。ω を含む n 次の r 進簡集合を $u_n(\omega)$ であらわす。これは

$$
\begin{aligned}
u_n(\omega) &= \{\omega' \mid x_k(\omega') = x_k(\omega),\ k=1,2,\cdots,n\} \\
&= [\,.\omega_1\omega_2\cdots\omega_n,\ .\omega_1\omega_2\cdots(\omega_n+1))
\end{aligned}
$$

ともあらわされる（ω_n+1 は $\bmod r$ で考える）。

μ を $(\Omega, \mathfrak{F})$ 上の連続な確率測度とし，§1 と類似に

$$
\mu_\alpha(M,\rho) = \inf_{\substack{v_i\ r\text{進簡集合} \\ \bigcup v_i \supseteqq M \\ \mu(v_i)<\rho}} \sum_i \mu(v_i)^\alpha ,
$$

$$\mu_\alpha(M) = \lim_{\rho\to 0} \mu_\alpha(M, \rho)$$

を定義する。この $\mu_\alpha(M)$ について §1 の 1) − 11) の成立つことが容易に証明できる。

$$\dim_\mu M = \sup\{\alpha \mid \mu_\alpha(M) = \infty\} = \inf\{\alpha \mid \mu_\alpha(M) = 0\}$$

によって <u>μ に関する M の Hausdorff 次元</u>を定義する。

特に Lebesgue 測度を λ であらわすことにすると、上のようにしてみちびかれる Hausdorff 測度 λ_α と、§1 で定義した l_α の関係は

12) $l_\alpha(M, \rho) \leqq \lambda_\alpha(M, \rho) \leqq 2r\, l_\alpha(M, \rho)$, したがって

13) $\dim M = \dim_\lambda M$

となる。12) の最初の不等号は l_α, λ_α の定義により、後の不等式は、任意の閉区間 I がその長さをこえない高々 $2r$ 個の r 進節集合で覆われることから示される。

μ と ν を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の2つの連続な確率測度とする。$0 < \xi$, $\eta < 1$ にたいし次のように約束する：

$$\begin{cases} \log \xi / \log 0 = \log 1/\log \eta = \log 1/\log 0 = 0 \\ \log 0/\log \eta = \log \xi/\log 1 = \log 0/\log 1 = \infty \\ \log 0/\log 0 = \log 1/\log 1 = 1 \end{cases}$$

定理 1. $0 \leqq \delta \leqq \infty$ とする。もし M が

$$M_\delta = \left\{ \omega \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} \frac{\log \nu(u_n(\omega))}{\log \mu(u_n(\omega))} = \delta \right\}$$

の部分集合ならば、

$$\dim_\mu M = \delta \cdot \dim_\nu M$$

が成り立つ。

これは次の定理から容易に導びかれる。

定理 2. $0 \leqq \delta \leqq \infty$ とする。もし M が

$$M'_\delta = \left\{ \omega \,\middle|\, \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \nu(u_n(\omega))}{\log \mu(u_n(\omega))} \geqq \delta \right\}$$

の部分集合ならば、

$$\dim_\mu M \geqq \delta \cdot \dim_\nu M.$$

定理 2 が定理 1 を含むことを示そう。$M \subset M_\delta$ とする。$M_\delta \subseteqq M'_\delta$ だから、$\dim_\mu M \geqq \delta \cdot \dim_\nu M$. 次に

$$M''_\delta = \left\{ \omega \,\middle|\, \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \mu(u_n(\omega))}{\log \nu(u_n(\omega))} \geqq \frac{1}{\delta} \right\}$$

とおけば、$M_\delta \subseteqq M''_\delta$ でもある。μ, ν を取りかえ、δ を $1/\delta$ におきかえて定理 2 を使うと

$$\dim_\nu M \geqq \frac{1}{\delta} \dim_\mu M.$$

定理2の証明. $\delta=0$のときは明らかに成立つから $\delta>0$としよう.

先ずμが次の条件(A)をみたす場合を証明する:

(A) Mと交わる任意の2進筒集合Vにたいして, $\mu(V)>0$.

任意に$\varepsilon>0$を取り, $\xi=\dim_\mu M+\varepsilon$, $\eta=\dfrac{1}{\delta}+\varepsilon$とおく. $\xi\eta \geqq \dim_\nu M$を示せばよい. $\dfrac{1}{\eta}<\delta$であるから, $\omega\in M$ならばある番号$N(\omega)$より大きいすべてのnにたいして

$$\frac{\log \nu(U_n(\omega))}{\log \mu(U_n(\omega))} \geqq \frac{1}{\eta}$$

である. $\log$の中が1をこえないから, これを変形して

$$\left[\nu(U_n(\omega))\right]^\eta \leqq \mu(U_n(\omega))$$

をうる. 0と1の間のρをとる.

$$M_\rho=\left\{\omega\in M \;\middle|\; \mu(U_n(\omega))\geqq \rho\wedge \nu(U_n(\omega))^\eta,\ n=1,2,\cdots\right\}$$

とおくと, $\rho\downarrow 0$のときM_ρはMに増加する. 実際, $\omega\in M$ならば, $\rho=\mu(U_{N(\omega)}(\omega))$とおけば仮定(A)により$\rho>0$であり, さらに$\mu(U_n(\omega))$は$n$と共に減少

するから，$\mu(u_n(\omega)) < \rho$ なら $n \geqq N(\omega)$．したがって $\mu(u_n(\omega)) \geqq \nu(u_n(\omega))^{\gamma}$．すなわち ω は今えらんだ ρ にたいして M_ρ にぞくする．

§1，8）により $\dim_\nu M_\rho \leqq \xi\gamma$ を示せばよい．$0 < \rho_1 < \rho$ と $\varepsilon_1 > 0$ を任意に取る．$\xi > \dim_\mu M_\rho$ だから，r 進簡集合による M_ρ の被覆 $\{v_i\}$ で $\mu(v_i) < \rho_1$ をみたすものを適当にえらぶと

$$\sum_i \mu(v_i)^{\xi} < \varepsilon_1 ,$$

とできる．すべての i について $v_i \cap M_\rho \neq \phi$ を仮定してもよい．したがって各 v_i は M_ρ のある ω にたいして $v_i = u_n(\omega)$ となっている．$\mu(v_i) \leqq \rho_1 < \rho$ であるから，M_ρ の定義により

$$\mu(v_i) = \mu(u_n(\omega)) \geqq \nu(u_n(\omega))^{\gamma} = \nu(v_i)^{\gamma},$$

したがって $$\sum_i \nu(v_i)^{\xi\gamma} < \varepsilon_1 .$$

$\nu(v_i) \leqq \rho_1^{\frac{1}{\gamma}}$ であるから

$$\nu_{\xi\gamma}(M_\rho, \rho_1^{\frac{1}{\gamma}}) < \varepsilon_1 .$$

先ず $\varepsilon_1 \to 0$，次に $\rho_1 \to 0$ として $\nu_{\xi\gamma}(M_\rho) = 0$ をうる．

次に仮定(A)のない一般の場合を証明する．E_μ を $\mu(v) = 0$ をみたすすべての r 進簡集合の和集合とする．$\dim_\mu E_\mu = 0$ なることは容易に示される．§1の8）により，2つの集合 A，B の対称差が E_μ に含まれるならば，$\dim_\mu A = \dim_\mu B$ である．

同じことは μ の代りに ν を考えても成立つ。$\omega \in M \cap E_\mu$ とせよ。そのとき十分大きい n にたいして $\mu(u_n(\omega))=0$ であるが、$\delta>0$ の仮定と定理1の前の約束により、十分大きい m にたいして $\nu(u_m(\omega))=0$，すなわち $\omega \in E_\nu$ である。したがって $M\cap E_\mu \subset M \cap E_\nu$。最後に $M \setminus E_\mu$ は仮定(A)を満足する集合だから、これについては定理が成立つことを注意する。

以上の注意から

$$\begin{aligned}\dim_\mu M = \dim_\mu(M\setminus E_\mu) &\geq \delta\cdot\dim_\nu(M\setminus E_\mu)\\ &\geq \delta\cdot\dim_\nu(M\setminus E_\nu) = \delta\cdot\dim_\nu M.\end{aligned}$$

3. Shift のエントロピーとの関係

前節のように $\omega \in \Omega$ の r 進展開 $\omega = .\omega_1\omega_2\cdots\cdots$ を考え，

$$T\omega = \quad .\omega_2\omega_3\cdots\cdots$$

によって定まる Ω 上の変換を考える。さらに T は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ 上のエルゴード的保測変換（あるいは shift）になっていると仮定する。μ が Lebesgue 測度 λ ならば，$\lambda(u_n(\omega))=r^{-n}$ であるから定理1の M_δ の条件は

$$(*)\qquad \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\nu(u_n(\omega)) = \delta\cdot\log r$$

となる。

今 $\nu(M)>0$ としよう。すると §1, 11) により $\dim_\nu M=1$ である。また Shannon-McMillan の定理により，(*) の左辺は ν-測度 1 で T のエントロピーにひとしいから，$M\subset M_\delta$ が成立つためには $h(T)=\delta\cdot\log n$ なる関係が必要である。したがって，定理 1，$\dim_\nu M=1$ および §2, 13) を合せて，$\nu(M)>0$，$M\subset M_{h(T)/\log n}$ なる M の(古典的) Hausdorff 次元は，

$$\dim M = h(T)/\log n$$

で与えられる。

<u>注意</u>. $\nu(M_{h(T)/\log n})=1$ ではあるが，与えられた ν-測度正の集合 M が $M_{h(T)/\log n}$ に含まれるかどうかは，別に確かめる必要がある。次節で示すように，実際には与えられた M にたいして ν を適当に定めて上の結果を適用するのである。一般に $\nu(M)>0$ なる M については

$$\dim M \geqq h(T)/\log n$$

のみがいえる。実際 $M'=M\cap M_{h(T)/\log n}$ とおけば，$\nu(M')>0$ を用いて，$\dim M\geqq\dim M'=h(T)/\log n$ をうる。

4. [0, 1] の部分集合の Hausdorff 次元の例

$p_i\geqq 0$，$\sum_{i=0}^{n-1}p_i=1$ なる n 個の組 $\{p_i\}$ を考える。$\{p_i\}$ に対応する Bernoulli shift T は ν は次のように定めることによってえられる：

$$\nu\{\omega \mid \omega_1 = i_1, \cdots, \omega_n = i_n\} = p_{i_1} \cdots p_{i_n}.$$

以下 (ν, T) は Bernoulli shift とする。

例 1. $r = 3$, $p_0 = p_2 = \dfrac{1}{2}$, $p_1 = 0$ とする。通常の Cantor 集合 M は

$$M = \{\omega \mid \omega_i = 0 \text{ または } 1,\ i = 1, 2, \cdots\}$$

とあらわすことができる。明らかに $\nu(M) = 1$。また $\omega \in M$ にたいしては

$$\mathcal{U}_n(\omega) = \{\omega' \mid \omega_1' = \omega_1, \cdots, \omega_n' = \omega_n\},\ (\omega_1, \cdots, \omega_n \text{ は } 0 \text{ または } 2),$$

であるから, $\nu(\mathcal{U}_n(\omega)) = 2^{-n}$. したがってすべての n にたいして $-\dfrac{1}{n} \log \nu(\mathcal{U}_n(\omega)) = \log 2$. これより $M \subset M_{\log 2/\log 3}$. ゆえに

$$\dim M = \log 3 / \log 2.$$

例 2. $r = 2$, $p_1 = p$, $p_0 = 1 - p$ とする。

$$M(p) = \{\omega \mid \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \omega_k = p\},$$

とおく。エルゴード定理により，$\nu(M(p))=1$.

$N_1(\omega, n)$ を $\{\omega_1, \cdots, \omega_k\}$ のうちの 1 の個数，$N_0(\omega,n)$ を 0 の個数とする。$N_1(\omega, n)=\sum_{k=1}^{n}\omega_k$，$N_0(\omega,n)=n-\sum_{k=1}^{n}\omega_k$ である。ν の定義から

$$-\frac{1}{n}\log\nu(u_n(\omega))=-\frac{1}{n}\left\{N_1(\omega,n)\log p+N_0(\omega,n)\log(1-p)\right\}$$

であるから，$\omega\in M(p)$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}\log\nu(u_n(\omega))=-\left[p\log p+(1-p)\log(1-p)\right]$$

である。したがって

$$\dim M(p)=-\frac{1}{\log 2}\left[p\log p+(1-p)\log(1-p)\right],$$

これは Eggleston が最初別な方法で証明したものである。

例2を一般化した次の結果も同じように証明される。

<u>例3.</u> 任意の r と，$p_0, \cdots, p_{r-1}$ をとる。ω の r 進展開を $.\omega_1\omega_2\cdots$ として，$0\leqq i\leqq r-1$ にたいし $N_i(\omega, n)$ を $\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ の中の i の個数とする。

$$M(p_0,\cdots,p_{r-1})=\left\{\omega \,\middle|\, \lim_{n\to\infty}N_i(\omega,n)/n=p_i,\ i=0,1,\cdots,r-1\right\}$$

とおくと，

$$\dim M(p_0, \cdots, p_{r-1}) = -\frac{1}{\log r}\sum_{i=0}^{r-1} p_i \log p_i.$$

<u>注意.</u> (ν, T) がもっと一般な shift たとえば Markov shift を与えるように ν を取ることにより，もっと複雑な集合の Hausdorff 次元を求めることができるが，方法は Bernoulli shift のときと全く同様である。